Avec, calcul différentiel

Développement :

Théorème des extremas liés :

leçons 159
214
215

Théorème :

Soit $f, g_1, \dots, g_k : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert. Posons $M = \{w \in U ;\ g_1(w) = \dots = g_k(w) = 0\}$. Si la restriction de f à M admet un extremum local en $m \in M$ et si : $\forall x \in M, (D_x g_i)_{i \in [\![1,k]\!]}$ famille linéairement indépendante, alors $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$ tq $D_m f = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i D_m g_i$. Les $(\lambda_i)_{i \in [\![1,k]\!]}$ sont appellés les multiplicateurs de Lagrange.

Preuve :

Etape 1 : On montre que M est une sous variété

Soit $g = (g_1, \dots, g_k)$. Alors $M = g^{-1}(\{0_{\mathbb{R}^k}\})$.

Par le théorème des sous variétés, M est une sous variété ssi : $\forall x \in M$, $D_x g$ est surjective. On $\forall x \in M$:

$$D_x g = \begin{pmatrix} D_x g_1 \\ \vdots \\ D_x g_k \end{pmatrix} \text{ est surjective car } \{D_x g_i\}_{i \in [\![1,k]\!]} \text{ famille libre.}$$

Ainsi M est bien une sous variété, de dimension $n-k$.

Etape 2 : On montre que $T_m(M) = \bigcap_{i=1}^{k} \ker(D_m g_i) := T$

. $T_m(M)$ est un espace vectoriel de dimension $n-k$ (même dimension que la sous variété)*. On a $\ker(D_m g) = \bigcap_{i=1}^{k} \ker(D_m g_i) = T$

De plus, $\dim \operatorname{Im}(D_m g) = k$ donc par le théorème du rang, $\dim T = n-k$. (on a montré que $\dim(T_m(M)) = \dim(T)$)

. Soit $v \in T_m(M)$. Alors $\exists I$ intervalle ouvert contenant 0 et une application différentiable $\gamma : I \longrightarrow M$ tq $\gamma(0) = m$ et $\gamma'(0) = v$. $\forall i \in [\![1,k]\!]$, $\forall t \in I$, on a $g_i(\gamma(t)) = 0$ (car $\gamma(t) \in M$ $\forall t \in I$). Ainsi $\forall i \in [\![1,k]\!]$, $\forall t \in I$, on a $D_{\gamma(t)} g_i \circ \gamma'(t) = 0$. On évalue en $t=0$ et on obtient $\forall i \in [\![1,k]\!]$: $D_m g_i(v) = 0$. (On a mq $T_m(M) \subset T$)

Étape 3 : Montrons que $T_m(M) \subset \ker(D_m f)$.

Soit $v \in T_m(M)$. Alors $\exists\, I$ intervalle ouvert contenant 0 et γ une application différentiable $\gamma : I \to M$ tq $\gamma(0) = m$ et $\gamma'(0) = v$.

On a $f_{|M} \circ \gamma(t) = f \circ \gamma(t)$ $\forall t \in I$, et cette fonction admet un extremum en $t = 0$ (car $\gamma(0) = m$). On a donc que $t \mapsto D_{\gamma(t)} f(\gamma'(t))$ s'annule en 0 car elle y admet un extremum. Cette dernière affirmation se traduit par $D_m f(v) = 0$ ce qui implique que $v \in \ker(D_m f)$. On conclut par le lemme :

Lemme : Soit $(v, u_1, \dots, u_k) \in (\mathbb{R}^n)'$ le dual de $\mathbb{R}^n$. Si $u_1, \dots, u_k$ est libre et si $\bigcap_{i=1}^{k} \ker u_i \subset \ker v$. Alors $\exists\, (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$ tq $v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i . u_i$

Preuve :

Posons $F = \mathrm{vect}(u_1, \dots, u_k) \subset (\mathbb{R}^n)'$ et $D = \mathrm{Vect}(v)$.

On a $\bigcap_{i=1}^{k} \ker(u_i) = \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, \forall i \in [\![1, k]\!]\ u_i(x) = 0\}$

$= F^\circ$

De même, $\ker(v) = D^\circ$.

$$\bigcap_{i=1}^{k} \ker u_i \subset \ker v \iff F^\circ \subset D^\circ$$
$$\iff (D^\circ)^\perp \subset (F^\circ)^\perp$$
$$\iff D \subset F$$

Or $v \in D \subset F$. $\exists\, (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}$ tq $v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i . u_i$. ■

Application : (thm spectral)

Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien $E = \mathbb{R}^n$. On a donc $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$ $\forall x, y \in E$. Alors E possède une base de vecteurs propres de u, et c'est une base orthonormale.

Preuve :

Soit $f : \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \langle u(x), x\rangle \end{array}$. f est différentiable.

Soit $g : \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \|x\|^2 - 1 \end{array}$.

Posons $M = \{x \in E ; g(x) = 0\} = S^1$. Comme S^1 est compact, $f|_{S^1}$ admet un maximum en e_1. On veut que $\forall x \in S^1$, $D_x g \neq 0$ (pour que la famille soit libre).

Soit $x \in S^1$, $h \in E$. On a :

$$\begin{aligned} g(x+h) - g(x) &= \|x+h\|^2 - 1 - \|x\|^2 + 1 \\ &= \langle x+h, x+h\rangle - \|x\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2\langle x, h\rangle + o(\|h\|) - \|x\|^2 \\ &= 2\langle x, h\rangle + o(\|h\|). \end{aligned}$$

Ainsi, $D_x g(h) = 2\langle x, h\rangle$. Cette application est non identiquement nulle, on applique le théorème des extrema liés : $\exists c \in \mathbb{R}$ tq $D_{e_1} f = c \cdot D_{e_1} g$. Calculons $D_{e_1} f$:

~~Remarquons~~ que $f = q \circ \psi$ avec $\psi : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \times E \\ x \longmapsto (u(x), x) \end{array}$

$q : \begin{array}{l} E \times E \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto \langle x, y\rangle \end{array}$

En utilisant la formule de différentiation de la composée, on obtient :

D'autre part, $D_x f(h) = 2 \langle u(x), h \rangle$

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \langle u(x+h), x+h \rangle - \langle u(x), x \rangle \\ &= \langle u(x) + u(h), x+h \rangle - \langle u(x), x \rangle \\ &= \cancel{\langle u(x), x \rangle} + \langle u(x), h \rangle + \langle u(h), x \rangle + \langle u(h), h \rangle - \cancel{\langle u(x), x \rangle} \\ u \text{ symétrique} \quad &= \langle u(x), h \rangle + \langle u(h), x \rangle + o(\|h\|) \\ &= 2 \cdot \langle u(x), h \rangle + o(\|h\|). \end{aligned}$$

Ainsi $\forall h \in E$, $2 \langle u(e_1), h \rangle = 2c \cdot \langle e_1, h \rangle$ et donc $u(e_1) = c \cdot e_1$.

De plus on a $f(e_1) = \langle u(e_1), e_1 \rangle = \langle c \cdot e_1, e_1 \rangle = c \cdot \|e_1\|^2 = c$

Posons $F = e_1^\perp$. Montrons que F est stable par u :

Soit $y \in F$. Montrons que $u(y) \in F$.

$$\begin{aligned} \langle u(y), e_1 \rangle &= \langle y, u(e_1) \rangle \\ &= \langle y, c(e_1) \rangle \\ &= c \langle y, e_1 \rangle \\ &= 0 \quad \text{car } y \in F \end{aligned}$$

Ainsi F stable par u. De plus $u_{|F}$ est un endo symétrique et $\dim F = \dim E - 1$. On conclut en itérant ce résultat.

Question du jury :

1) Mq $T_x M$ a la même dimension que M.

M sous variété donc $\exists h$ difféomorphisme tq $h(U \cap M) = h(U) \cap (\mathbb{R}^{n-k} \times \{0_{\mathbb{R}^k}\})$

$\forall v \in T_x M$, Soit γ une courbe, dérivable en zéro, $(\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M \subset \mathbb{R}^n)$ tq $\begin{cases} \gamma'(0) = v \\ \gamma(0) = x \end{cases}$. Alors l'image de γ $\subset \mathbb{R}^{n-k} \times \{0_{\mathbb{R}^k}\}$ par h est $\boxed{h \circ \gamma \text{ courbe de } \mathbb{R}^{n-k} \times \{0_{\mathbb{R}^k}\}}$ et d'origine $h(\gamma(0)) = h(x)$.

↳ donc aussi sa dérivée

En différenciant en $t = 0$, $(h \circ \gamma)'(0) = D_{\gamma(0)} h \circ \gamma'(0) = D_x h \circ \underbrace{\gamma'(0)}_{\in T_x M}$

donc $D_x h \circ T_x M \in \mathbb{R}^{n-k} \times \{0_{\mathbb{R}^k}\}$ et réciproquement.

Ainsi $D_x h \circ T_x M = \mathbb{R}^{n-k} \times \{0_{\mathbb{R}^k}\}$

d'où $\dim(T_x M) = \dim (D_x h)^{-1}(\mathbb{R}^{n-k} \times \{0_{\mathbb{R}^k}\}) = \dim M = n - p$ ■